Λύση: α) (i) Έχουμε την Σ.Δ.Ε.

$$(4x+3y^2)dx+2xydy=0, \qquad (1)$$

η οποία είναι γραμμένη στην μορφή $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ με $P(x,y)=4x+3y^2$ και $Q(x,y)=3xy$. Είναι: $P_y=\dfrac{\partial P}{\partial y}=6y$ και $Q_x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y$.

Η (1) δεν είναι ακριβής, αφού $P_y \neq Q_x$, οπότε θα αναζητήσουμε ολοκληρωτικό παράγοντα. Είναι, $P_y-Q_x=6y-2y=4y$ και $\dfrac{P_y-Q_x}{Q}=\dfrac{4y}{2xy}=\dfrac{2}{x}=f(x)$, συνάρτηση μόνο του x.

Άρα , η (1) δέχεται έναν ολοκληρωτικό παράγοντα (συνάρτηση μόνο του x) της μορφής (η σταθερά ολοκλήρωσης μπορεί να ληφθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας ίση με μηδέν):

$$\mu(x)=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}dx}=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln|x|}=x^2, \quad x\neq 0.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η (1) ανάγεται στην εξίσωση $(4x^3+3x^2y^2)dx+2x^3ydy=0$ για την οποία ισχύει $P_y=6x^2y=Q_x$, δηλαδή είναι ακριβής.

(ii) Έχουμε την Σ.Δ.Ε.

$$ydx-(x-2y)dy=0 \qquad (2)$$

η οποία είναι γραμμένη στη μορφή $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ με $P(x,y)=y$ και $Q(x,y)=-(x-2y)$. Είναι, $P_y=\dfrac{\partial P}{\partial y}=1\neq Q_x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1$. Συνεπώς η (2) δεν είναι ακριβής.

Παρατηρούμε ότι $\dfrac{P_y-Q_x}{P}=\dfrac{1-(-1)}{y}=\dfrac{2}{y}=g(y)$, συνάρτηση μόνο του y.

Άρα , η (2) δέχεται έναν ολοκληρωτικό παράγοντα (συνάρτηση μόνο του y) της μορφής (η σταθερά ολοκλήρωσης μπορεί να ληφθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας ίση με μηδέν):

$$\mu(y)=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{-P}dy}=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln|y|}=\frac{1}{y^2}, \quad y\neq 0.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η (2) ανάγεται στην εξίσωση $\dfrac{1}{y}dx-\dfrac{x-2y}{y^2}dy=0$ για την οποία ισχύει $P_y=-\dfrac{1}{y^2}=Q_x$, δηλαδή είναι ακριβής.

β) Η εξίσωση (v) της Άσκησης 1 α) γράφεται ισοδύναμα

$$y(1+2xy)dx+x(1-2xy)dy=0, \qquad (3)$$

Δηλαδή στη μορφή $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ με $P(x,y)=y(1+2xy)$ και $Q(x,y)=x(1-2xy)$.
Είναι, $P_y=1+4xy\neq Q_x=1-4xy$. Συνεπώς η (2) δεν είναι ακριβής. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{P_y-Q_x}{xP-yQ}=\frac{8xy}{4x^2y^2}=\frac{2}{xy}=h(xy), \quad x,y\neq 0,$$ συνάρτηση του γινομένου xy.

Άρα , η (2) δέχεται έναν ολοκληρωτικό παράγοντα (συνάρτηση μόνο του xy) της μορφής (η σταθερά ολοκλήρωσης μπορεί να ληφθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας ίση με μηδέν):

$$\mu(xy)=e^{-\int\frac{P_y-Q_x}{xP-yQ}d(xy)}=e^{-\int\frac{2}{xy}d(xy)}=e^{-2\ln|xy|}=\frac{1}{x^2y^2}, \quad x,y\neq 0.$$

$$\frac{1+2xy}{x^2y}dx+\frac{1-2xy}{xy^2}dy=0 \qquad (4)$$

για την οποία ισχύει $P_y=-\frac{1}{x^2y^2}=Q_x$, δηλαδή είναι ακριβής.

Η (4) είναι ακριβής και επομένως η γενική της λύση θα δίνεται από την σχέση (βλ. (11) σελ. 73):

$$\int_a^x \frac{1+2ty}{t^2y}dt+\int\frac{1-2ay}{ay^2}dy=c \quad \text{ή}$$

$$\int_a^x \frac{1}{t^2y}dt+2\int_a^x\frac{1}{t}dt+\int\frac{1}{ay^2}dy-\int\frac{2ay}{ay^2}dy \Rightarrow \frac{1}{y}\left[-\frac{1}{t}\right]_{t=a}^{t=x}+2\ln|t|\Big|_{t=a}^{t=x}-\frac{1}{ay}-2\ln|y| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{ay}-\frac{1}{xy}+2\ln|x|-2\ln|a|-\frac{1}{ay}-2\ln|y| \Rightarrow 2\ln|x|-2\ln|y|=\frac{1}{xy}+2\ln|a|+c \Rightarrow$$

$$2\ln\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{1}{xy}+c_2 \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{1}{2xy}+c_3 \Rightarrow \frac{x}{y}=Ce^{\frac{1}{2xy}} \Rightarrow y=Cxe^{\frac{-1}{2xy}}, \quad x\neq 0, y\neq 0,$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά. (Το ίδιο αποτέλεσμα όπως και στην 1 (v)).

Η γενική λύση της (4) θα μπορούσε βέβαια να βρεθεί αν αναζητήσομε συνάρτηση f(x,y) τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1+2xy}{x^2y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1-2xy}{xy^2}.$$

Οπότε ολοκληρώνοντας την πρώτη ως προς x έχουμε

$$f(x,y)=\int\frac{1+2xy}{x^2y}dx=\int\frac{1}{x^2y}dx+\int\frac{2}{x}dx=-\frac{1}{xy}+2\ln|x|+\varphi(y)$$

και η παράγωγος αυτής ως προς y, λόγω της δεύτερης, δίνει

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{xy^2}+\varphi'(y)=\frac{1}{xy^2}-\frac{2}{y} \Rightarrow \varphi'(y)=-\frac{2}{y} \Rightarrow \varphi(y)=-2\ln|y|.$$

Η γενική λύση τώρα είναι f(x.y)=c ή $f(x,y)=-\frac{1}{xy}+2\ln|x|-2\ln|y|=c$, δηλαδή

$$2\ln\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{1}{xy}+c \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{1}{2xy}+c_1 \Rightarrow \frac{x}{y}=c_2e^{\frac{1}{2xy}} \Rightarrow y=Cxe^{\frac{-1}{2xy}}, \quad x\neq 0, y\neq 0,$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά. (Το ίδιο αποτέλεσμα όπως και παραπάνω).

Οι συναρτήσεις $x\neq 0$, $y\neq 0$, που έχομε εξαιρέσει είναι **ιδιάζουσες λύσεις** της εξίσωσης.

Άσκηση 6. Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε.

$$y'\sqrt{y}-2xy^{3/2}-4xy=0, \quad y=y(x)>0. \qquad (1)$$

Υπόδειξη: Με κατάλληλες πράξεις η δοθείσα εξίσωση ανάγεται σε μία Δ.Ε. γνωστού τύπου.

Λύση: Διαιρώντας με $\sqrt{y}\neq 0$ η εξίσωση (1) ανάγεται στην

$$y'-2xy=4xy^{1/2}, \; y=y(x)>0, \qquad (2)$$

η οποία είναι Δ.Ε. τύπου Bernoulli με $n = \frac{1}{2}$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (2) επί $y^{-\frac{1}{2}}$ και στη συνέχεια κάνοντας την αντικατάσταση $z = y^{1-n} = y^{\frac{1}{2}}$, όπου $z = z(x)$, αναγόμαστε στην εξίσωση $z' - xz = 2x$, η οποία είναι γραμμική διαφορική εξίσωση $1^{ης}$ τάξης ως προς την $z = z(x)$, και της οποίας η γενική λύση δίνεται από τη συνάρτηση

$$z(x) = e^{\int x dx}\left[c + \int 2xe^{-\int x dx}\right] = e^{\frac{x^2}{2}}\left[c + \int 2xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\right] = e^{\frac{x^2}{2}}\left[c - 2e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = ce^{\frac{x^2}{2}} - 2,$$ όπου c αυθ. σταθ.

Επειδή $z = y^{\frac{1}{2}}$ η γενική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε είναι $y^{\frac{1}{2}} = ce^{\frac{x^2}{2}} - 2$, δηλαδή

$$y(x) = (ce^{\frac{x^2}{2}} - 2)^2, \quad \text{όπου c αυθαίρετη σταθερά.}$$

Άσκηση 7. Προσδιορίστε την σταθερά k ώστε η συνάρτηση $y_1(x) = kx$ να αποτελεί μια μερική λύση της Σ.Δ.Ε.

$$y' + 8xy^2 - 4x(4x+1)y + (8x^3 + 4x^2 - 1) = 0, \quad y = y(x), \tag{1}$$

και στη συνέχεια βρείτε τη γενική της λύση.

Λύση:

Αναγνωρίζουμε ότι η δοθείσα εξίσωση είναι μια διαφορική εξίσωση τύπου Riccati.

[illegible], για να βρούμε την γενική λύση της (1), αρκεί να γνωρίζουμε μια λύση αυτής. Μας δίνεται στην εκφώνηση ότι η (1) δέχεται λύση της μορφής $y_1(x) = kx$. Άρα θα κάνουμε αντικατάσταση της συνάρτησης $y = kx$ στην (1) και θα προσδιορίσουμε το k. Έχουμε $k + 8xk^2x^2 - 16kx^3 - 4kx^2 = -8x^3 - 4x^2 + 1$, δηλαδή $(8k^2 - 16k)x^3 - 4kx^2 + k = -8x^3 - 4x^2 + 1$, απ' όπου προκύπτει $k = 1$. Άρα μια λύση της (1) είναι η $y_1(x) = x, \quad x \neq 0$. Ο μετασχηματισμός

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u} = x + \frac{1}{u} \tag{2}$$

όπου $u = u(x)$ νέα άγνωστη συνάρτηση, ανάγει την εξίσωση (1) σε μία γραμμική Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξης. Πράγματι από τη (2) έχουμε: $y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$ και θέτοντας αυτήν καθώς και τη (2) στην (1) προκύπτει:

$$1 - \frac{u'}{u^2} + 8x\left(x^2 + \frac{2x}{u} + \frac{1}{u^2}\right) - 4x(4x+1)\left(x + \frac{1}{u}\right) + (8x^3 + 4x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$u^2 - u' + 8x^3u^2 + 16x^2u + 8x - 4x(4x+1)xu^2 - 4x(4x+1)u + (8x^3 + 4x^2 - 1)u^2 = 0 \Rightarrow u' + 4xu = 8x.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι γραμμική $1^{ης}$ τάξης ως προς u της οποίας η γενική λύση δίνεται από τη συνάρτηση:

$$u(x) = e^{-\int 4x dx}\left[c + \int 8xe^{\int 4x dx}dx\right] = e^{-2x^2}\left[c + \int 8xe^{2x^2}dx\right] = e^{-2x^2}\left[c + 2e^{2x^2}\right] = ce^{-2x^2} + 2.$$

Τελικά

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)} = x + \frac{1}{ce^{-2x^2} + 2} \Rightarrow y(x) = x + \frac{e^{2x^2}}{2e^{2x^2} + c},$$ όπου c αυθαίρετη σταθερά,

που είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1).